EDUCACIÓN a DISTANCIA

MATEMÁTICA 3

3

Buenos Aires Provincia
Dirección General de Cultura y Educación
Dirección de Educación de Adultos

MANUAL DE EDUCACIÓN A DISTANCIA

GOBERNADORA DE LA PROVINCIA DE BUENOS AIRES
Lic. María Eugenia Vidal

DIRECTOR GENERAL DE CULTURA Y EDUCACIÓN
Lic. Gabriel Sánchez Zinny

SUBSECRETARIO DE EDUCACIÓN
Lic. Sergio Siciliano

DIRECTOR DE EDUCACIÓN DE ADULTOS
Prof. Ing. Pedro Schiuma

SUBDIRECTOR DE EDUCACIÓN DE ADULTOS
Prof. Juan Carlos Latini

RESOLUCIÓN DE CREACIÓN 106/18 Adecuación de la estructura curricular modular del Programa Educación a Distancia	Año de impresión 2019 - 2da Edición

PRESENTACIÓN

Este material que hoy llega a sus manos forma parte de una serie de módulos del Programa de Educación a Distancia (Res. 106/18) de la Dirección de Educación de Adultos de la Provincia de Buenos Aires. El mismo busca ampliar el acceso a la educación secundaria de aquellos jóvenes y adultos mayores de 18 años que se encuentren imposibilitados de concurrir a nuestras escuelas.

La evolución de las tecnologías de la información y de la comunicación nos permite repensar el modelo educativo de enseñanza-aprendizaje. El objetivo de la modalidad a distancia es superar las limitaciones de tiempo y espacio de todos aquellos bonaerenses que quieran terminar sus estudios secundarios. Este Programa tiene como propósito que los estudiantes puedan ingresar y egresar en cualquier momento del año, avanzando según su propio ritmo y con la posibilidad de organizar su trayecto formativo.

La Educación a Distancia es una herramienta que se suma a las ofertas de terminalidad secundaria que ofrece la provincia de Buenos Aires en pos de alcanzar a aquellos que el sistema educativo no les proponía una alternativa de estudio que no requiera concurrir a los servicios educativos presenciales de tiempo completo y con desplazamiento diario.

Esta modalidad se caracteriza por la mediatización de la relación entre el docente y el estudiante, a través de recursos de aprendizaje específicos que permiten la actividad autónoma de éstos.

Los estudiantes contarán así con el acompañamiento permanente de un profesor tutor a través de los distintos recursos que ofrece el Campus Virtual (campusvirtualadultos.com.ar), y también en instancias presenciales de encuentros individuales e intercambios abiertos grupales para compartir intereses, preocupaciones, dudas, opiniones, explicaciones, materiales, etc.

Este material estará disponible tanto en formato digital como impreso, para que sin importar sus posibilidades, los estudiantes tengan acceso al mismo. Completar sus estudios secundarios es, fundamentalmente, dar un paso más en la construcción de su ciudadanía.

Director de Educación de Adultos
Prof. Ing. Pedro Schiuma

Introducción

¡Bienvenidos a este nuevo módulo!

Al iniciar el trabajo en Matemática III, ya hemos transitado un camino de aprendizaje de nociones matemáticas en los módulos anteriores. Esto significa que no se acerca ahora a la matemática por primera vez. Sin embargo, sus experiencias al respecto pueden ser muy variadas.

Sin duda, utilizamos diariamente una gran cantidad de nociones matemáticas sin darnos cuenta de ello, las usamos eficientemente y de manera tal que nos permita resolver diferentes situaciones relativas a la vida cotidiana.

En dicho módulo, aprenderemos los elementos básicos de la geometría, puntos, coordenadas, planos, rectas, ángulos y sus formas de medición. Estos conceptos nos permiten introducir el concepto de razones trigonométricas de un ángulo en un triángulo rectángulo. Además ampliaremos el uso de las razones trigonométricas a ángulos no agudos y definiremos las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente. Conjuntamente con el cálculo del perímetro y área de los triángulos.

Además trabajaremos con cuadriláteros, los vamos a clasificar, y dar algunas herramientas para calcular su perímetro y su área.

Por último trabajaremos con el concepto de círculo y circunferencia. Quizás el círculo sea la figura más fundamental en el universo. La circunferencia que es el borde de un círculo así que vale la pena conversar acerca de ella y entender algunas de sus propiedades, calcularemos el área y el perímetro.

Les proponemos aprender matemática descubriendo los conceptos a partir de situaciones que podrían presentarse en la realidad, o de problemas pertenecientes a otras ciencias que utilizan conceptos matemáticos para resolverlos.

¡Éxitos en su recorrido!

UNIDAD 1 Punto, recta, ángulos

¡ Empezamos a estudiar!

Conozcamos un poco más sobre este tema leyendo el apunte de clase que se encuentra a continuación.

Apuntes de clase:
Rectas. Paralelismo y perpendicularidad

1. Plano

Desde los inicios de la historia, el ser humano ha representado los objetos y figuras que lo rodean. Para ello ha necesitado disponer de alguna superficie sobre la que trazar puntos, líneas, círculos u otras figuras. Desde los antinguos problemas escritos en tabletas de arcilla por matemáticos sumerios hace 4000 años atrás a los modernos planos utilizados en la arquitectura o la ingeniería, disponemos de innumerables ejemplos de representaciones elaboradas sobre superficies más o menos planas.

Problema de geometria en una tableta de arcilla perteneciente a una escuela para escribas; Susa, primera mitad del segundo milenio antes de Cristo.

El **plano** es el lugar donde se ubican los elementos geométricos, en este módulo de Matemática.

En la práctica trabajaremos en una porción de papel o en la pantalla de una computadora. El plano es así de importancia para la geometría, ya que nos permite representar figuras y situaciones sobre él. Los elementos geométricos fundamentales son los puntos y rectas que definiremos a continuación.

Trabajando en un *plano* físico en papel, que representa *aproximadamente* al plano matemático.

1. 1. Puntos y rectas

Dentro del plano distinguimos dos elementos fundamentales: el punto y la recta. Sólo es posible describirlos en relación a otros elementos.

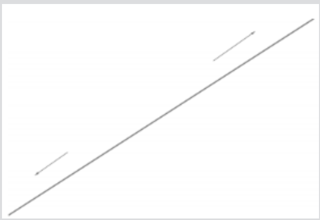
Euclides (en su libro Elementos, escrito hace alrededor de 2300 años) nos dice:

Punto "es lo que no tiene ninguna parte"

El punto es la unidad mínima de la comunicación visual. Es una figura geométrica sin dimensión, tampoco tiene longitud, área, ni volumen. No es un objeto físico. Puede utilizarse para especificar una posición en el plano. Lo representaremos con una cruz ("+" ó "×") o con un pequeño círculo negro "."

La definición de recta de Euclides es: *"lo que tiene longitud, pero no anchura".* Sin embargo encontramos más claro decir que:

La **Recta** es una línea continua que se extiende sin límites a lo largo de una dirección (sin curvarse) en ambos sentidos, sin anchura, y con una cantidad infinita de puntos.



La recta se extiende en una dirección, en ambos sentidos, sin límites. No puede jamás dibujarse toda en un papel, o computadora.

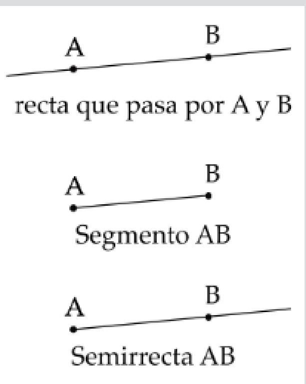
Cuando decimos sin límite queremos decir que no tiene principio ni final. Cuando representamos la recta en papel o en una pantalla, podremos dibujar sólo una porción de la recta y no la recta sin límites. Además dibujaremos una línea que tiene anchura, cuando la recta matemática no la tiene.

Así, cuando identificamos una estrella real en el cielo, con un punto matemático, no tendremos en cuenta el tamaño de la estrella. Y cuando identificamos una vía de tren sin curvas con una recta matemática, estamos despreciando el ancho de la vía, y también estamos consi- derándola como si se prolongara en ambos sentidos sin límite. Son modelos geométricos que nos permiten estudiar y comprender nuestra experiencia de la realidad.

1. 2. Recta, semirrecta y segmento

Tomemos dos puntos distintos sobre el plano y unámoslos mediante una línea. Existen desde luego muchas maneras de hacerlo, pero hay una de ellas que es la más corta entre todas las posibles.

A la línea más corta que une dos puntos del plano la llamamos **segmento.**



Si designamos los dos puntos con las letras A y B, designaremos AB al segmento que los une. Así, A y B pasan a ser los extremos del segmento.

Si prolongamos el segmento indefinidamente por ambos extremos, obtenemos una recta. Un segmento es parte de una recta que pasa por esos dos puntos.

Si prolongamos el segmento AB por uno solo de sus extremos (B por ejemplo) obtenemos una **semirrecta.**

En este caso decimos que el punto A es el origen de esta semirrecta.

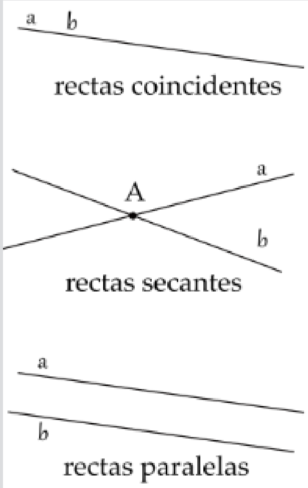
Propiedades de la recta

Existen algunas propiedades de la recta esenciales para la geometría. Estas son algunas de ellas:

1. a) Dados dos puntos distintos en un plano, existe una única recta que pasa por ambos.

2. a) Toda recta divide al plano en dos regiones, llamadas semiplanos.

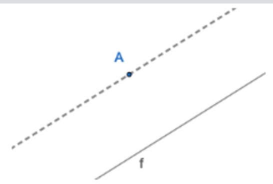
Para cumplir estas funciones se desarrollan políticas estatales, que puedan estar orientadas a cumplir más de una ocupación a la vez.



1. 3. Posiciones relativas de dos rectas

Tracemos dos rectas sobre un plano. Pueden ocurrir varios casos distintos. Podría suceder que ambas rectas estén colocadas de manera superpuesta una a la otra. Sería imposible distinguirlas; serían, en definitiva, una misma recta. Decimos que las dos rectas son **coincidentes.**

En el caso de que las dos rectas sean distintas, podría ser que no llegaran a tocarse nunca: diremos que son **paralelas**, o bien que se toquen en algún punto, y las llamaremos rectas **secantes.** En este último caso, el punto en que se cortan es único.



Por el punto A, sólo puede trazarse una paralela a la recta f.

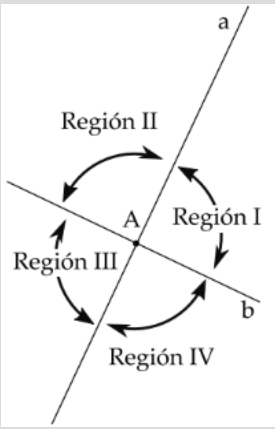
Paralelismo

Sabemos ya que dos rectas son paralelas si no tienen ningún punto común. Euclides observó que por cualquier punto exterior a una recta puede trazarse una única recta paralela a ella. Esto no puede comprobarse experimentalmente ¿porqué? Intente hacerlo en una hoja de papel.

Aceptamos que:

> **Quinto postulado de Euclides:** Por cualquier punto exterior a una recta se puede trazar una única recta paralela a ella.

De acuerdo con nuestro Euclides, el paralelismo es uno de los conceptos básicos de la geometría. Por este motivo, la geometría que estamos descubriendo recibe el nombre de "geometría euclídea".



a y b so rectas secantes perpendiculares: cada región tiene igual "amplitud".

1. 4. Perpendicularidad

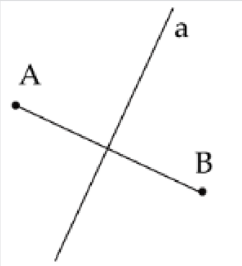
Dos rectas que se cortan en un punto, dividen al plano en cuatro regiones. Intuitivamente si las cuatro regiones en que queda dividido el plano tienen la misma "amplitud" decimos que las dos rectas son perpendiculares (¿te acordás que lo llamábamos "ángulo recto"?. Más adelante precisaremos qué queremos decir con la palabra amplitud, por ahora miremos el gráfico).

Dos rectas son perpendiculares si dividen al plano en cuatro regiones de igual amplitud.

Dada una recta y un punto sobre ella, existe una única recta que contiene a este punto y es perpendicular a la recta.

ACTIVIDAD 1

a) Si dos rectas tienen dos puntos en común ¿cuál es su posición relativa?
b) ¿y si tienen exactamente un punto en común?
c) ¿y si no tienen ningún punto en común?



a es la mediatriz del segmento AB

2. Mediatriz

2. 1. Definición de mediatriz

Dados dos puntos A y B, podemos construir el segmento AB que los une.

Se llama mediatriz del segmento AB a la recta que es perpendicular a este segmento y que pasa por su punto medio.

La mediatriz divide al segmento AB en otros dos segmentos de igual longitud.

La recta mediatriz tiene una importante propiedad: la distancia de cualquier punto de esa recta a cada uno de los dos extremos del segmento AB es la misma.

ACTIVIDAD 2

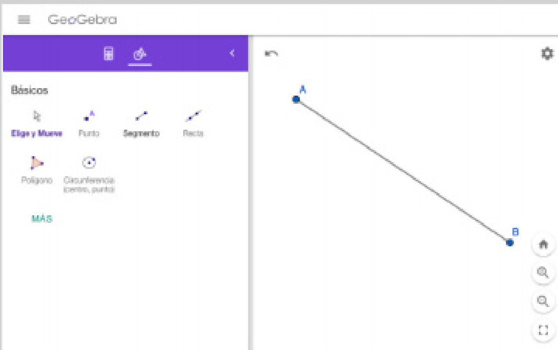
Construcción de la mediatriz

Utilizaremos Geogebra en el navegador de internet en una computadora (Esta actividad está probada en el Navegador Chrome). También puede realizarse en el celular.

1. Abrí la dirección https://www.geogebra.org/geometry en tu navegador. (encontrarás a la izquierda el panel de herramientas).

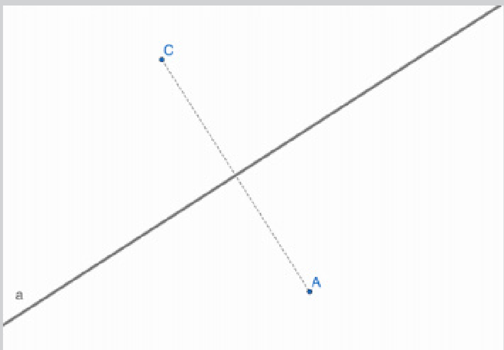
2. Click en Herramienta Segmento. (andá al panel derecho, que representa el plano geométrico) y allí:

3. hacé click dos veces en posiciones distintas. (debe aparecerte el Segmento AB).



4. luego en el panel Izquierdo buscá y seleccioná la Herramienta "Mediatriz" (si no aparece deberás hacer click en MAS).

5. hacé click en el segmento AB.



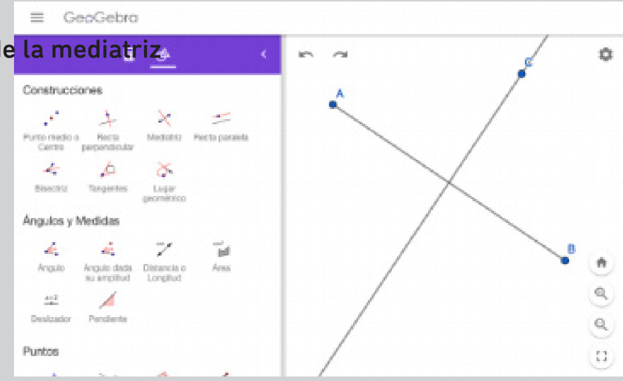
Felicitaciones ya está creada la mediatriz. No borre este documento, volveremos a utilizarlo.

6. Guarde este documento como mediatriz. Geogebra lo guiará.

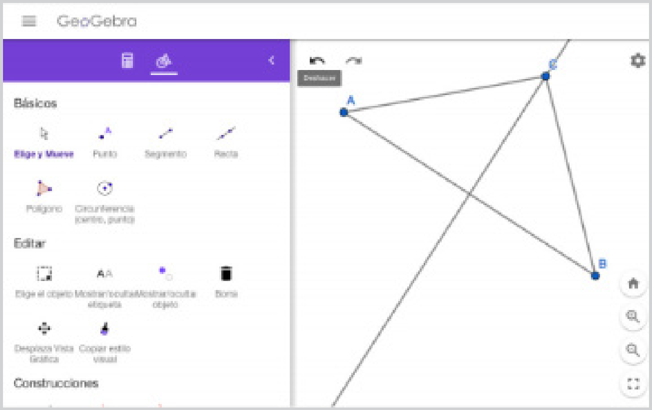
ACTIVIDAD 3 Propiedad de distancias de la mediatriz

Volvamos al documento *mediatriz* de Geogebra.
1. Elija la herramienta *punto*.
2. Haga click sobre la recta mediatriz. (deberá aparecer un punto C).

Construcción de la mediatriz

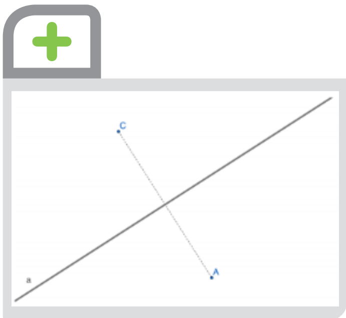


3. Con la herramienta *segmento*, construya el segmento CA y el segmento CB
4. Busque y seleccione la herramienta *distancia*.
5. haga click en los segmentos CA y CB.



6. busque y seleccione la herramienta distancia. Si no la ve recuerde que debe hacer click en “MAS”, y busque en la sección “Angulos y Medidas”.
7. haga click en los segmentos CA y CB. (deberían aparecer números cerca de cada segmento) ¿Cómo son esos números?
8. Ahora seleccione la herramienta “Elije y mueve”
9. Seleccione el punto C y sin soltar el botón del ratón, arrastre el punto C, a lo largo de la recta mediatriz.¿qué pasa con los segmentos? y con los números “distancia” que están sobre los segmentos?

2. 2. Reflexión o Simetría axial



Dada una recta a y un punto B que no pertenezca a ella, vamos a buscar otro punto C con la condición de que la recta a sea la mediatriz del segmento BC.

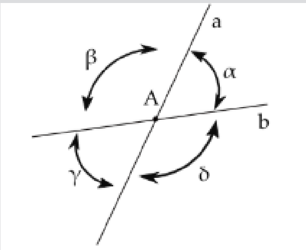
El punto C así buscado se llamará **simétrico de C** y la recta se llamará **eje de simetría.**

Este tipo de simetría se denomina **reflexión** o simetría axial y se puede aplicar a cualquier figura geométrica. Para ello representamos los simétricos de todos los puntos de la figura original y obtenemos así otra figura simétrica a la primera.

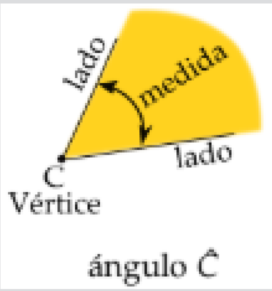
La reflexión produce figuras simétricas de forma similar a como actúa un espejo.

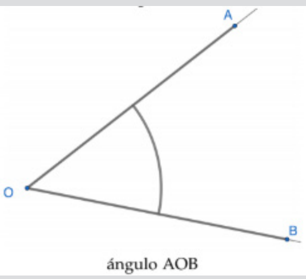
ACTIVIDAD 4 Reflexión

1. ¿Adónde se reflejará un punto C que está sobre el eje de simetría?
2. Supongamos que tengo un segmento AB de 3 metros de longitud. Llamemos A' al punto simétrico de A. Y B' será el punto simétrico de B. ¿Cuál será el nombre del segmento simétrico de AB? ¿Cuál será la longitud de ese segmento simétrico? Realice un dibujo en papel de la situación.
3. Vuelva a Geogebra y realice un documento Geogebra de dicha situación utilizando las herramientas de las actividades geogebra anteriores. Chequee que la longitud del Segmento AB es igual a la longitud del segmento A'B', es decir que la reflexión *no altera la longitud de los objetos.*
4. Ahora en papel dibuje un cuadrado de un lado del eje de simetría. Y reflréjelo del mejor modo que pueda. Obtendrá un cuadrado del otro lado... Qué relación habrá entre el área del cuadrado original y el área del cuadrado refleajado?
5. Repita la actividad anterior en geogebra. Investigue qué herramientas le permitirán construir un cuadrado, o un rectángulo. Y refléjelos con la herramienta geogebra adecuada.
6. Utilice ahora la herramienta *área*, investigue y responda:
- ¿Cambian las áreas de las figuras al ser reflejadas?
- Pruebe con un polígono de tres puntos (un triángulo), cambia el área?

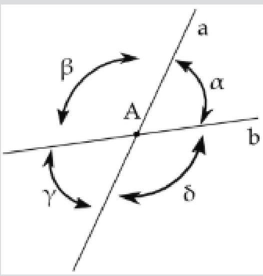


Dos rectas secantes *a* y *b* dividen al plano en cuatro ángulos.





ángulo AOB



3. Ángulos. Clasificación y medida.

3. 1. Definición de ángulo

En el plano (recuerda que no tiene bordes, o sea, es ilimitado) repre- senta un punto A. Traza dos rectas secantes a y b que se corten en este punto A. El plano queda así dividido en cuatro regiones que se tocan en el vértice.

Cada una de las cuatro regiones en que se divide el plano al tranzar dos rectas secantes se llama **ángulo.**

¿Cómo se pueden nombrar los ángulos?

- **Opción 1:** Utilizamos una letra griega. En la figura hay cuatro ángulos: α (alfa), β (beta), γ (gama), y δ (delta).
- **Opción 2:** Utilizamos el mismo nombre del punto del vértice: $\hat{C}$ (ver figura al margen). Noten que en la figura anterior, no puedo utilizar el nombre $\hat{A}$ ya que podría referirme a cualquiera de los cuatro ángulos.
- **Opción 3:** Utilizo tres puntos. siendo el del medio, el punto vértice: $\widehat{AOB}$

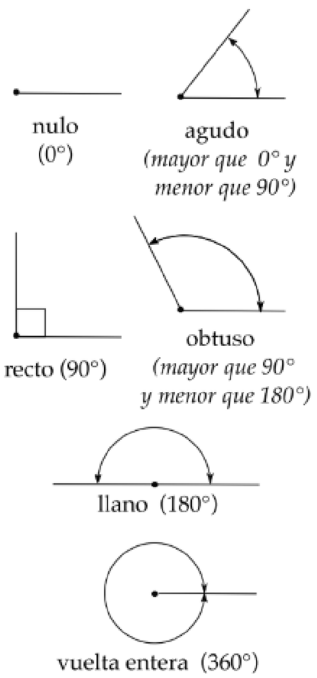
Cada ángulo limita con dos semirrectas con origen en A.

Cada una de esas dos semirrectas que limitan al ángulo se llaman **lado.**

Vemos que las regiones que llamamos **ángulo** pueden tener distinta "amplitud". Llamaremos **medida** del ángulo a esta amplitud. Atendiendo a ella, identificaremos distintos tipos de ángulos, estableceremos relaciones entre ellos y mediremos las amplitudes.
Veamos de nuevo la figura en el margen. Cada ángulo tiene otro "opuesto" que tiene igual amplitud. A este par de ángulos que tienen igual amplitud y se tocan sólo en el vértice, los llamaremos **opuestos por el vértice.**

Los pares de ángulos opuestos por el vértice siempre tienen la misma medida.

Clases de ángulos



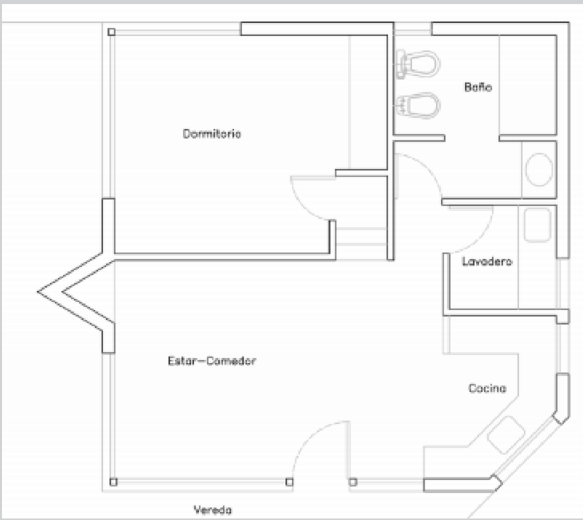
Veremos luego que podremos utilizar los ángulos para representar movimientos giratorios.

Tipos de ángulos

Por su amplitud, distinguimos diversos tipos de ángulos. Utilizaremos el sistema llamado sexagesimal para asignarles una medida **numérica** a los ángulos. La unidad de medida angular será el grado "°" sexagesimal (no confundir con el grado centígrado que utilizamos para medir temperatura).

- Ángulo **nulo:** es el que resulta al trazar dos semirrectas con igual origen e idéntico sentido. Le asignaremos una medida de 0° (cero grados)
- Ángulo **recto:** es aquel cuyos lados son perpendiculares. Su medida es 90°. Equivale a un giro de un cuarto de vuelta.
- Un ángulo es **agudo** si es mayor que el ángulo nulo y de menor que el ángulo recto (mayor que 0° y menor que 90°).
- Ángulo **llano:** es el que resulta al trazar dos semirrectas con igual origen pero sentido opuesto. Mide el doble de un recto, es decir 180°. Puede utilizarse para representar un giro de media vuelta.
- Un ángulo **obtuso** si es mayor que un recto y menor que un llano (mayor que 90° y menor que 180°).
- El ángulo de un giro total (o vuelta entera) por lo tanto será equivalente al doble de un llano, o sea 360°.

ACTIVIDAD 5 Obligatoria Los ángulos en la arquitectura



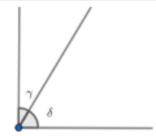
1) ¿Cuántos ángulos rectos puede encontrar? señálelos en la figura.
2) Y cuántos ángulos agudos? y cuantos obtusos puede encontrar?
3) Ahora clasifique los números anteriores para cada habitación y complete la siguiente tabla:

Habitación	Cantidad de ángulos		
	.... rectos	.... agudos	.... obtusos
Dormitorio			
Baño			
Lavadero			
Cocina			
Estar - comedor			

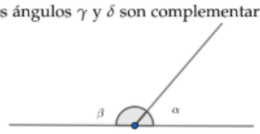
¿Qué conclusión puede obtener de las respuestas anteriores?

WEB

Pueden ejercitar con las actividades propuestas en este sitio:
https://www.smartick.es/blog/matematicas/recursos-didacticos/angulos-i/



Los ángulos γ y δ son complementarios.



Los ángulos α y β son suplementarios.

3. 2. Relaciones entre ángulos.

Dos ángulos son consecutivos si tienen el vértice y un lado en común y iguales si tienen la misma amplitud.

- Llamamos complementarios a dos ángulos si son consecutivos y equivalen a un recto. La suma de dos complementarios es 90°.
- Llamamos suplementarios a dos ángulos si son consecutivos y equivalen a un llano. La suma de dos suplementarios es 180°.

ACTIVIDAD 6 Obligatoria Relaciones entre ángulos

a) ¿Cuáles de los siguientes pares de ángulos en la figura son opuestos por el vértice?
b)¿Cuáles son Consecutivos?
c) ¿Cuáles son Complementarios?
d) ¿Cuáles son Suplementarios?

1. α y β
2. α y γ
3. β y δ

¿cómo te diste cuenta?
e) Puede ser que un par de ángulos sea a la vez Consecutivo y Opuesto por el vértice? Dá ejemplos por sí, o por no.
f) Puede ser que dos ángulos sean Suplementarios y Opuestos por el vértice a la vez? Cómo te diste cuenta?

ACTIVIDAD 7 El reloj y los ángulos

Consideremos un reloj analógico, como los de antes, con la aguja larga del minutero y la aguja pequeña de las horas. Para cada pregunta, al principio realizá un dibujo sencillo que te sirva para responder.

Otra opción es que tomes dos palitos de diferente longitud y los pongas en posición sobre un papel.

1) A las seis de la tarde qué ángulo forman las agujas?

2) ¿Y a las 9 de la noche?

3) ¿En algún momento las agujas forman un ángulo nulo? Cuándo?

4) ¿Cuándo forman ángulos llanos?

5) ¿En qué momentos forman un ángulo agudo?

6) ¿Y cuándo formarán ángulos obtusos?

Describí cómo te diste cuenta de las respuestas.

WEB

Pueden ayudarse y ejercitar con las actividades propuestas en este sitio:
https://www.smartick.es/blog/matematicas/recursos-didacticos/relojes-y-angulos/

¿Alguna actividad que no sabes cómo resolverla?
Los espera el tutor en el Campus Virtual o en el encuentro presencial para acompañarlos y ayudarlos.

UNIDAD 2 Trigonometría y Pitágoras

¡ Empezamos a estudiar!

Conozcamos un poco más sobre este tema leyendo el apunte de clase que se encuentra a continuación.

Apuntes de clase:
Trigonometría y Pitágoras

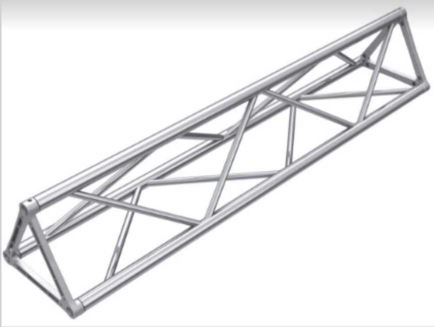
1. Triángulos

Un triángulo es una figura geométrica con tres ángulos y tres lados. Es la figura con menor número de lados y ángulos que se puede construir en geometría.

Es de suma importancia en Ingeniería y Arquitectura ya que es el único polígono que no se deforma cuando actúa sobre él una fuerza.

ACTIVIDAD 8 **Estructuras basadas en triángulos**

Observe con detenimiento las figuras siguientes:



Señale en cada una al menos cuatro triángulos.
¿Puede observar que dichas estructuras dependen fundamentalmente de elementos triangulares?

Continuamos con la lectura del apunte

Propiedad: Para cualquier triángulo en el plano *la suma de las medidas de sus tres ángulos internos siempre es 180°.*

VIDEO

El siguiente video nos muestra cómo comprobar la propiedad anterior, mediante el Geogebra: https://www.youtube.com/watch?v=PjHNAgcq2Kk

Hay muchos tipos diferentes de triángulos. No nos interesa clasificarlos por tamaño ni por su posición, sino por la medida de sus ángulos.

Vamos a dar un repaso a los tipos más importantes de triángulos y sus características. Si necesitas repasar los tipos de ángulos puedes visitar entradas anteriores.

1.1. Clases de triángulos según la relación entre sus ángulos

Los clasificaremos en: **equiláteros, isósceles y escalenos,** atendiendo a la relación entre sus ángulos.

Triángulo equilátero

Su denominación indica que los tres lados son iguales. Esto sucede porque en los triángulos equiláteros los tres ángulos son iguales, tienen la misma medida. Si dividimos los 180° totales entre los tres ángulos obtenemos 180°/3 = 60°

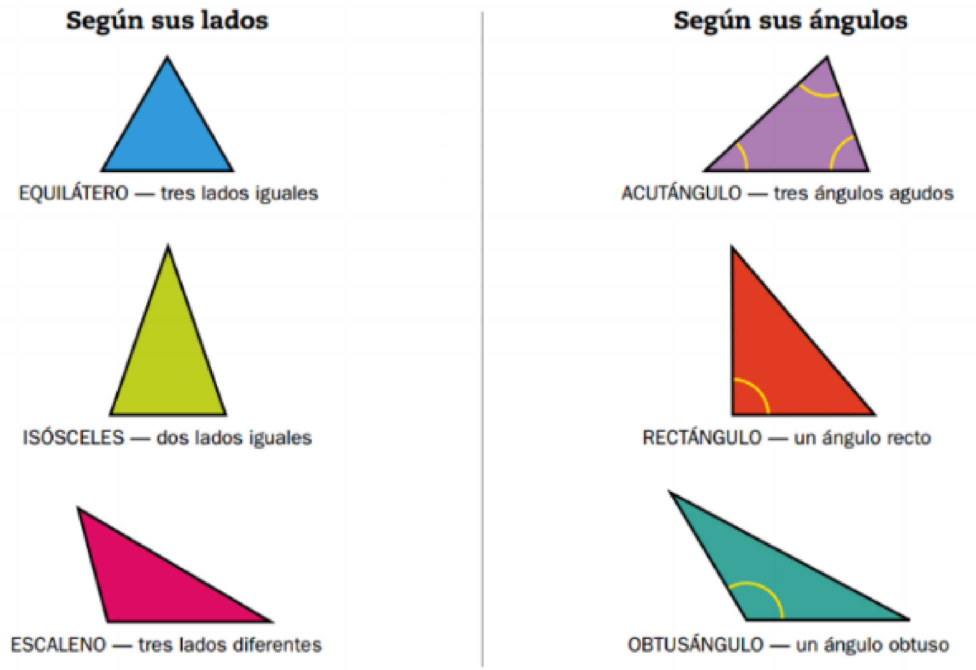
Triángulo escaleno

En los triángulos escalenos todos los ángulos son diferentes, cada uno tiene una medida distinta. Esta característica tiene que ver con que cada uno de los tres lados también tengan medidas diferentes.

Triángulo isósceles

Los triángulos isósceles tienen dos ángulos de igual medida y uno diferente. Y así, esta clase de triángulos tendrán dos lados iguales y uno diferente también. El lado que es distinto es precisamente el que está entre los ángulos iguales.

Clases de triángulos



1. 2. Clases de triángulos según el tipo de sus ángulos

Considerando el tipo de ángulos que poseen los triángulos, los clasificaremos en: **acutángulos, rectángulos u obtusángulos.**

Triángulo acutángulo

En los triángulos acutángulos todos los ángulos son agudos. El triángulo equiátero es también acutángulo, ya que todos sus ángulos miden 60o. Los triángulos isósceles y escaleno pueden ser acutángulos si todos sus ángulos son agudos o también existe la posibilidad de que no lo sean.

Triángulo rectángulo

En los triángulos rectángulos uno y sólo uno de los ángulos es recto. Dado que el ángulo recto mide 90o y el triángulo tiene tres ángulos que suman 180o, en consecuencia los otros dos ángulos son agudos y suman 90o entre los dos. El triángulo rectángulo puede ser isósceles si los dos ángulos agudos son iguales, cada uno mediría 45o. Y si cada uno de los ángulos es diferente sería escaleno.

Si un triángulo es *rectángulo*, llamaremos **catetos** a los dos lados más cortos. Y llamaremos **hipotenusa** al lado más largo.

ACTIVIDAD 9

Para un triángulo rectángulo, señalá cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, y cuáles falsas.

a) la hipotenusa es más corta que un cateto.
b) El ángulo de 90o tiene un lado que es un cateto, y el otro lado es la hipotenusa.
c) la suma de las longitudes de los catetos es menor que la longitud de la hipotenusa.
d) la hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto. ¿Cómo te diste cuenta de lo que afirmás?

Triángulo obtusángulo

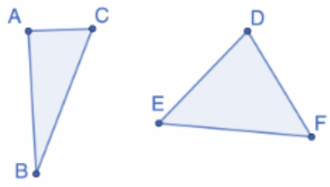
En los triángulos obtusángulos uno de los ángulos es obtuso. Los otros dos son agudos. Si los ángulos agudos son iguales el triángulo obtusángulo sería también isósceles. Si todos los ángulos son diferentes sería escaleno.

ACTIVIDAD 10

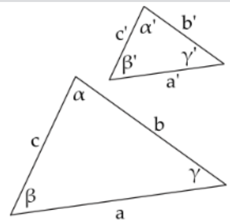
¿Es posible que un triángulo ...

a) ... sea a la vez isósceles y rectángulo?
b) ... sea a la vez rectángulo y acutángulo?
c) ... sea a la vez equilátero y rectángulo?
d) ... sea a la vez acutángulo y obtusángulo?
e) ... tenga dos ángulos obtusos?
f) ... tenga ángulos que midan 30o, 60o y 70o? Porqué?
g) ... tenga ángulos que midan 30o, 60o y 90o? Clasifíquelo según relación y según tipo de ángulos.

Para cada respuesta afirmativa dé un ejemplo mediante un dibujo. En caso de respuesta negativa, diga cómo se dió cuenta.



Las figuras no son semejantes



Los ángulos correspondientes son *iguales* y Los lados correspondientes son *proporcionales*, por lo tanto los dos triángulos son *semejantes*

2. Semejanza de figuras.

Los clasificaremos en: **equiláteros, isósceles y escalenos,** atendiendo a la relación entre sus ángulos.

Dos figuras son **semejantes** si sus *segmentos correspondientes son proporcionales y sus ángulos iguales.* Es decir: las dos figuras:

*) son de igual tamaño, ó
*) tienen "la misma forma" aunque difieran en su **tamaño.**

Cada longitud en una de las figuras se obtiene multiplicando la longitud correspondiente en la otra por un número fijo que se llama razón de semejanza.

2. 1. Criterios de semejanza de triángulos

Un criterio de semejanza de dos triángulos es un conjunto de condiciones tales que, si se cumplen, podemos asegurar que los dos triángulos son semejantes.

No es necesario comprobar que sus ángulos son iguales y que sus lados son proporcionales para saber si dos triángulos son semejantes. Es suficiente que se cumpla alguno de los siguientes criterios (ver figura).

1) $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, o
2) $a'/a = b'/b = c'/c$ o
3) tienen dos lados proporcionales y el ángulo comprendido entre dichos lados es igual a su correspondiente: $a'/a = b'/b$ y $\gamma = \gamma'$

2. 2. Aplicaciones

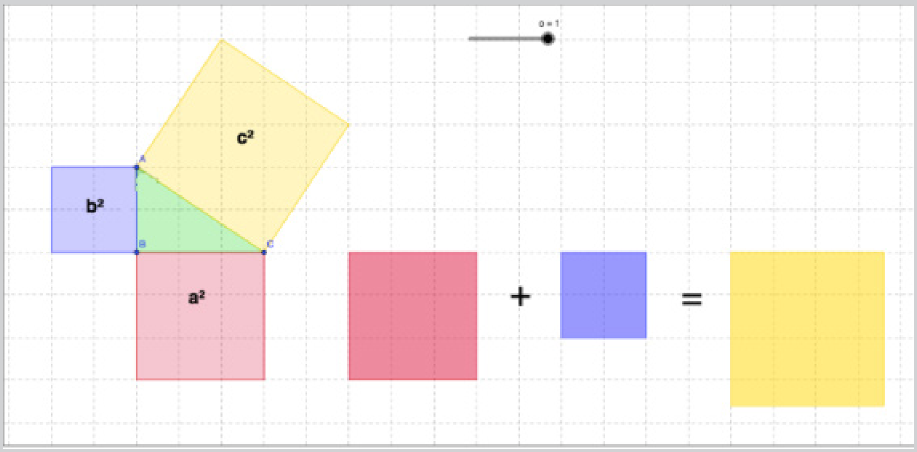
La semejanza de figuras, y en particular la semejanza de triángulos, tiene muchas aplicaciones prácticas. En este apartado estudiaremos los siguientes problemas:

1 - Cálculo de la altura de un objeto vertical a partir de su sombra.
2 - Cálculo de la altura de un objeto vertical con un espejo.

3. Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras da una relación entre la hipotenusa y los catetos de un triángulo rectángulo:

a) Observe la siguiente figura:



b) Fijese que del lado izquierdo de la imagen hay un triángulo rectángulo. Las longitudes de sus catetos son a, b y la de la hipotenusa es: c.
c) ¿qué área tienen los cuadrados de colores? ¿cómo lo sabe?
d) fíjese que los tres cuadrados de colores también están a la derecha, con un signo "+" y un "=", como si fuera una fórmula pero con figuras. ¿qué piensa que quiere decir esa "fórmula"?
e) Mire el siguiente documento geogebra y mueva el deslizador:
https://www.geogebra.org/m/DE7Tp8aG - ¿qué representa esta visualización?

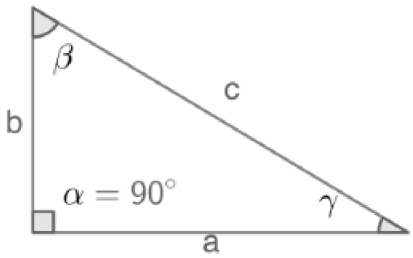
Continuamos con la lectura del apunte

Dado lo que hemos trabajado en la actividad anterior, enunciaremos el siguiente

Teorema de Pitágoras
En todo triángulo rectángulo se verifica que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos:

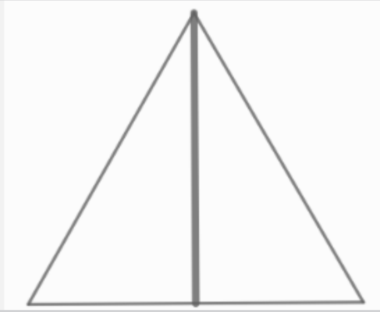
$$\mathbf{a^2 + b^2 = c^2}$$

en la fórmula anterior: *a* y *b* son las longitudes de los catetos, y c es la longitud de la hipotenusa.

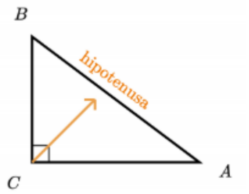


ACTIVIDAD 12 Aplicaciones del Teorema de Pitágoras

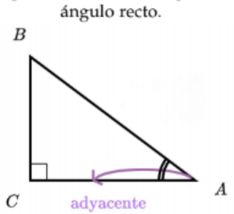
1) ¿Es posible que un triángulo cuyos lados miden 3, 7 y 8 metros sea un triángulo rectángulo? ¿Y si sus lados miden 3, 4 y 5 metros? ¿Cómo lo sabe?
2) Calcule la longitud de un cateto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa miden 5.45m y el otro cateto mide 2.3m. Dibuje a escala en un papel cuadriculado. (puede tomar 1metro= 2 cuadraditos). El valor obtenido con la calculadora y el valor medido en el papel ¿Son aproximadamente iguales? ¿Cuál es su perímetro?
3) Dibuje en un papel un triángulo que sea rectángulo e isósceles a la vez, y que tenga longitud de sus catetos igual a 1 metro. ¿Cuánto miden sus tres ángulos? ¿Cuánto mide su hipotenusa? ¿Coincide lo calculado con el dibujo, aproximadamente?
4) Un campo tiene forma de rectángulo, cuyos lados miden 400 por 500 metros. Se quiere dividirlo en dos triángulos rectángulos con un alambrado de un hilo. ¿Qué longitud de alambre precisamos?
5) Un herrero construye un triángulo equilátero con tres barras de hierro de 4 metros de longitud. Para dar mayor resistencia a la estructura, agrega una barra de hierro más corta, por un vértice del triángulo y perpendicular al otro lado. Calcule la longitud de la última barra, y el total de longitud de hierro que precisa. (Dibuje en un papel, identifique ángulos, busque aplicar lo que sabe).



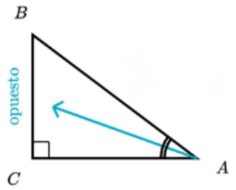
(pista: ¿qué relación tiene la barra más corta con el concepto de mediatriz? ¿en qué clase de figuras divide dicha mediatriz al triángulo equilátero?)



La hipotenusa es el lado opuesto al ángulo recto.



El lado AC es el lado adyacente al ángulo $\hat{A}$.



El lado BC es el lado opuesto al ángulo $\hat{A}$

4. Trigonometría

Utilizamos palabras especiales para designar los lados de triángulos rectángulos:

Recordemos que la **hipotenusa** es el lado más grande de un triángulo rectángulo, y siempre es el lado opuesto al ángulo recto.

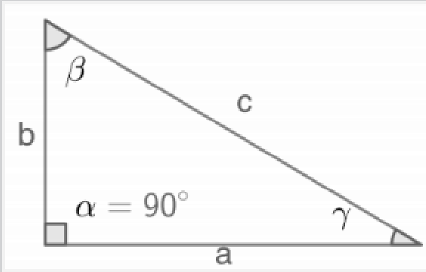
El **adyacente** de un ángulo (no recto) es un cateto que “yace” o está junto al ángulo dado (no es la hipotenusa).

El lado **opuesto** es el que está enfrente del ángulo dado.

Los lados opuesto y adyacente se nombran por su relación con respecto a un ángulo.

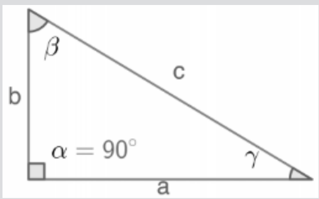
ACTIVIDAD 13

Vean la figura siguiente y respondan.



1) ¿Cuál es el lado opuesto al ángulo γ?
2) ¿Cual es el ángulo cuyo lado adyacente es b ?
3) ¿Es posible que un lado sea el opuesto de un ángulo y el adyacente de otro? Dá un ejemplo en la figura.

Continuamos con la lectura del apunte



4. 1. Razones trigonométricas

Considerando el tipo de ángulos que poseen los triángulos, los clasificaremos en: **acutángulos, rectángulos u obtusángulos.**

Las razones o cocientes de los lados de un triángulo rectángulo se llaman razones trigonométricas.

Tres razones trigonométricas comunes son : seno (sin), coseno (cos) y tangente (tan).

Estas se definen para el ángulo agudo β como sigue:

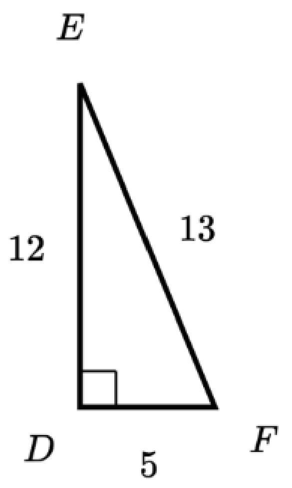
$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{\text{Longitud opuesto a } \beta}{\text{longitud hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos(\beta) = \frac{\text{Longitud adyacente a } \beta}{\text{longitud hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan(\beta) = \frac{\text{Longitud opuesto a } \beta}{\text{longitud adyacente a}\beta} = \frac{a}{b}$$

VIDEO

Pueden consultar el siguiente video sobre las definiciones de funciones trigonométricas:
https://youtu.be/fbK-wwfeSyM



4. 2. SOH-CAH-TOA

La palabra sohcahtoa nos ayuda a recordar las definiciones de seno, coseno y tangente. Veamos:

- **S**eno es **O**puesto sobre **H**ipotenusa
- **C**oseno es **A**dyacente sobre **H**ipotenusa
- **T**angente es **O**puesto sobre **A**dyacente

Ejemplo: Para el triángulo DEF del margen:

$\text{sen}(\hat{F}) = 12/13$ $\text{sen}(\hat{E}) = 5/13$
$\cos(\hat{F}) = 5/13$ $\cos(\hat{E}) = 12/13$
$\tan(\hat{F}) = 12/5$ $\tan(\hat{E}) = 5/12$

Verifique que $\text{sen}^2 (\hat{F}) + \cos2 (\hat{F}) = 1$

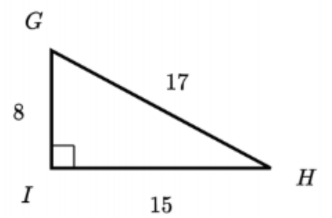
ACTIVIDAD 14

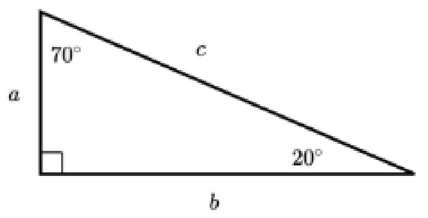
1) Para el triángulo GHI en el margen: Calcule el coseno, el seno y la tangente del ángulo Gˆ
2) Mire el triángulo del margen, de lados a, b, c. ¿Cuáles de las siguientes razones trigonométricas vale a/c ?

[ ] cos(20°) [ ] sen(20°)

[ ] tan(20°) [ ] cos(70°)

[ ] sen(70°) [ ] tan(70°)





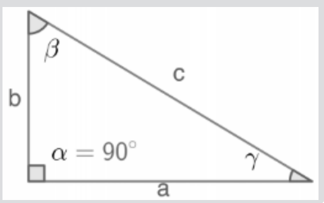
ACTIVIDAD 15

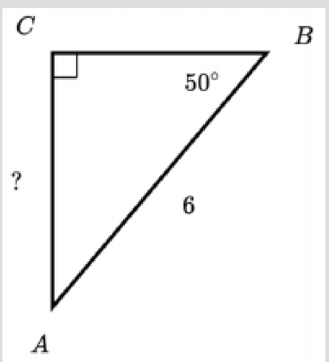
1) Construyo dos triángulos semejantes como en la figura, donde uno de ellos es del *doble* de tamaño que el otro.
2) Dése cuenta que los podemos llamar por sus vértices: el pequeño triángulo es 4 $\widehat{ABC}$ mientras que el de mayor tamaño es 4 $\widehat{ADE}$. ¿Los pudo identificar recorriendo con su dedo los vértices en la figura?
3) Según la definición, considerando el triángulo 4 $\widehat{ABC}$ ¿a cuánto equivale el seno de $\hat{A}$? ¿No debería ser sen $\hat{A}$= BC/AC? Verifique.
4) Y si consideramos el triángulo 4 $\widehat{ADE}$? No debería ser sen $\hat{A}$= DE/AE? Verifique.
5) Pero entonces, el valor del seno ¿depende del triángulo que consideres? En este caso suponga que el triángulo pequeño tiene lados de longitud 4, 3 y 5 m.
Recuerde que el triánguloa grande es el doble de tamaño que el pequeño, con ese dato calcule la longitud de los lados del triángulo grande.

Finalmente calcule el sen $\hat{A}$, insertando los valores ya obtenidos, para cada triángulo. Verifique que no se altera el valor del seno.

VIDEO

El siguiente video produndiza las definiciones de funciones trigonométricas:
https://youtu.be/HqA5yaKwwPE





5. Resolución de triángulos

Resolver un triángulo significa hallar la longitud de sus tres lados y la medida de sus tres ángulos. Generalmente, algunas de estas magnitudes son conocidas y deben calcularse las que faltan. Como ya mencionamos, si el triángulo es rectángulo podemos utilizar las razones trigonométricas y el Teorema de Pitágoras para resolverlo.

5. 1. Hallar la medida de un lado desconocido

Ejemplo
Para el Triángulo ABC, determiná la medida de AC.

Solución
Paso 1: decide cuál razón trigonométrica usar. Enfoquémonos en el ángulo B ya queestá dado explícitamente en el diagrama.
Observa que nos han dado la longitud de la hipotenusa, y nos piden determinar la longitud del lado *opuesto* al ángulo B La razón trigonométrica que utiliza a estos dos lados es el *seno.*
Paso 2: crea una ecuación con la razón trigonométrica del seno y resuelve el lado desconocido:

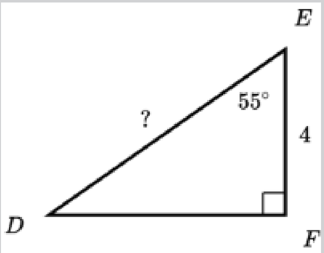
- sen(B)= opuesto/hipotenusa — Define Seno
- sen(50◦) = AC/6 — Sustituye
- 6 sen(50◦) = AC — Multiplica ambos lados por 6
- 4, 60 ≈ AC — Evalúa con una calculadora

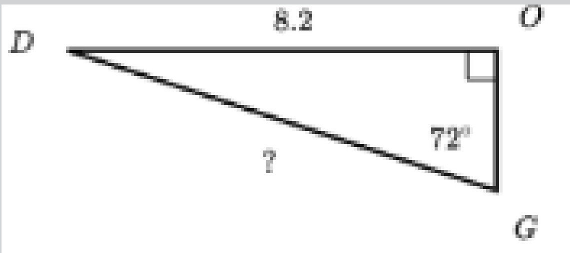
ACTIVIDAD 16 Obligatoria Resolver

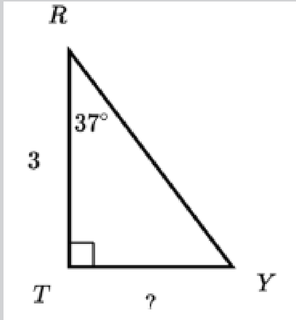
1) Dado el triángulo DEF, calcula DE. Redondea tu respuesta a ldos cifras decimales.
2) Para el triángulo DOG, calcula el lado DG.
3) En el triángulo TRY, calcula TY.
4) En el triángulo MIX, el valor z se puede hallar mediante la ecuación:

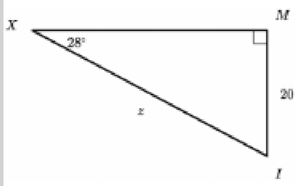
[ ] sen 28 = 20/z [ ] cos 28 = 20/z
[ ] cos 62 = 20/z [ ] tan 62 = 20/z

(puede haber más de una respuesta válida)









Continuamos con la lectura del apunte

5. 2. Hallar la medida de un ángulo desconocido

Problema: en el triángulo del margen, ¿cuál es la medida del ángulo?

Lo que podemos calcular: con respecto al ángulo L, sabemos las longitudes de los lados opuesto y adyacente, así que podemos escribir:

$$\tan(L) = \frac{\text{opuesto}}{\text{adyacente}} = \frac{35}{65}$$

¿Cómo hallar L de la anterior ecuación?

Hay herramientas matemáticas para resolver problemas como este. El seno, coseno y tangente no sirven, ya que toman ángulos y devuelven razones de lados. Acá necesitamos lo opuesto: son las **funciones trigonométricas inversas** que permiten calcular ángulos, cuando se conocen los lados del triángulo.

- El **seno inverso** o **arco seno** anotado arc sen(x) es la función que permite despejar el ángulo de "adentro" del seno:
  Si sen(α) = 0,6 **entonces** α = arc sen(0,6)

- El **coseno inverso** o **arco coseno** (lo anotaremos arc cos) es la función que permite despejar el ángulo de "adentro" del coseno:
  Si cos(α) = 0,2 **entonces** α = arc cos(0,2)

- La **tangente inversa** o **arco tangente** (lo anotaremos arctan) es la función que permite despejar el ángulo de "adentro" de la tangente:
  Si tan(α) = 1,3 **entonces** α = arctan(1,3)

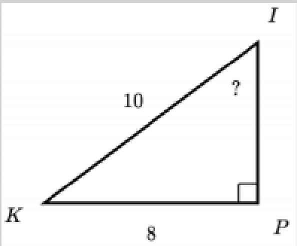
Volvamos al problema de hallar L: $\tan(L) = \frac{35}{65}$

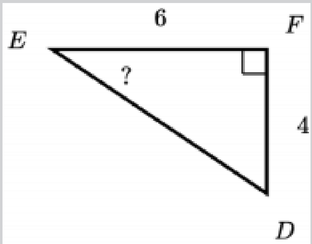
aplicaré arco tangente: $L = \arctan(\frac{35}{65})$

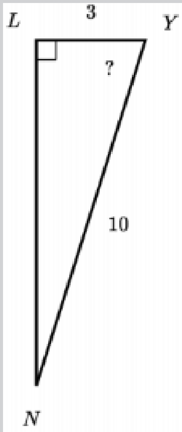
$$L \approx 28{,}30°$$

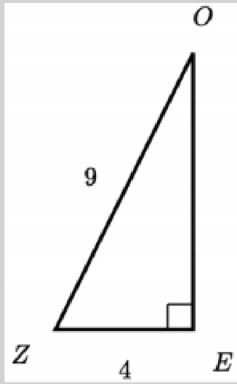
ACTIVIDAD 17 Obligatoria

Para los triángulos KIP, DEF, y NYL calculá el valor del ángulo "?".
Para el triángulo ZOE, hallá todos sus datos (todos sus lados, y todos sus ángulos)









Continuamos con la lectura del apunte

5. 3. Perímetro y Área de triángulos

Definimos **perímetro** P como la longitud total del borde de una figura plana. En el caso de un triángulo, el perímetro equivale a la suma de sus tres lados.

P = lado1 + lado2 + lado3

Para un triángulo calcularemos su área A multiplicando la longitud de la base b, por la longitud de la altura h y dividiendo por 2.

A = b.h/2

ACTIVIDAD 18

1) Vuelva a la actividad anterior, y calcule el Perímetro de los cuatro triángulos KIP, DEF, NYL y ZOE.
2) Para cada triángulo KIP, DEF, NYL y ZOE:
a) identifique la base, y anote cuánto mide.
b) identifique la altura, y anote cuánto mide. Si no la conoce, calcúlela.
c) Dibuje para cada triángulo, un rectángulo cuya base coincida con la base del triángulo, y su altura coincida con la altura del triángulo. Verifique que en ese rectángulo caben dos triángulos iguales. ¿Qué relación hay entre el área del rectángulo y el área del triángulo?
d) Calcule el área de cada triángulo utilizando la fórmula:
Area = base x altura dividido dos.

¿Alguna actividad que no sabes cómo resolverla?
Los espera el tutor en el Campus Virtual o en el encuentro presencial para acompañarlos y ayudarlos.

UNIDAD 3 Cuadriláteros

¡ Empezamos a estudiar!

Conozcamos un poco más sobre este tema leyendo el apunte de clase que se encuentra a continuación.

Apuntes de clase: Clases

1. Clases

Vimos que los triángulos son figuras en el plano, cuyo borde está constituido por tres lados que son segmentos. Son polígonos de tres lados.

Llamamos **cuadriláteros** a figuras en el plano, cuyo borde está compuesto por cuatro segmentos, o sea que son polígonos de cuatro lados.

Tienen cuatro **vértices** y dos **diagonales.** Asimismo tienen cuatro ángulos internos, por lo que pueden llamarse *cuadrángulos* también.

Nos interesarán los cuadriláteros simples, cuyos lados no se cortan entre sí. Los vamos a clasificar, y dar algunas herramientas para calcular su perímetro y su área.

1. 1. Clases

Al tener en cuenta sus lados y sus ángulos, clasificaremos a los cuadriláteros en tres grandes clases: los paralelogramos, trapecios y trapezoides.

- Paralelogramos son los cuadriláteros que tienen los lados opuestos paralelos. Son los siguientes:
    - Cuadrado: Tiene 4 lados iguales y 4 ángulos rectos.
    - Rectángulo: Tiene lados iguales dos a dos y 4 ángulos rectos.
    - Rombo: Tiene 4 lados iguales y ángulos iguales dos a dos.
    - Romboide: Tiene los ángulos y los lados iguales dos a dos.
- Trapecio: Sólo tiene 2 lados paralelos.
- Trapezoide: No tiene ningún lado paralelo.

Veamos las clases en la siguiente tabla:

CUADRILÁTEROS

son polígonos de cuatro lados

CLASIFICACIÓN

según sus lados se clasifican en

PARALELOGRAMOS

lados paralelos 2 a 2.
Según sean sus lados iguales pueden ser:

TRAPECIOS

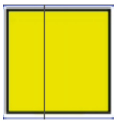
2 lados paralelos

TRAPEZOIDES

sin lados paralelos

cuadrados

4 lados iguales
4 ángulos rectos



rectángulos

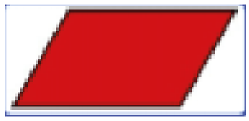
lados iguales 2 a 2
4 ángulos rectos

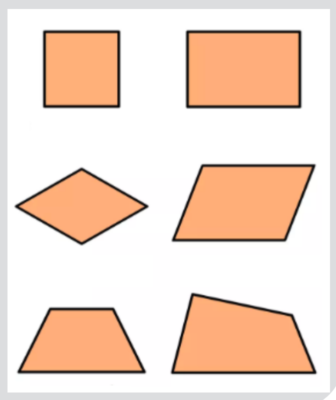
rombos

4 lados iguales
ángulos iguales dos a dos

romboides

lados iguales 2 a 2.
ángulos iguales dos a dos





ACTIVIDAD 19

1) Clasifique los cuadriláteros de la imagen en el margen

VIDEO

En este video veremos algunas propiedades de los cuadriláteros
https://www.youtube.com/watch?v=vJskILrx5Kw

Continuamos con la lectura del apunte

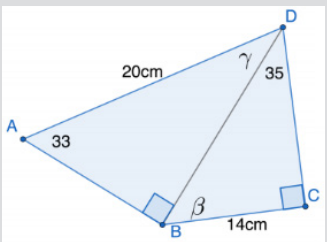
Como pudiste ver en el video:

A todo cuadrilátero lo podremos dividir en dos triángulos por medio de una diagonal.

Esta propiedad importante nos permitirá calcular áreas y perímetros de los cuadriláteros.

1. 2. Área

Al dividir un cuadrilátero en dos triángulos, el área del mismo será igual a la suma de las áreas de cada triángulo.



1. 3. Perímetro

Al dividir un cuadrilátero en dos triángulos, el perímetro del mismo podrá obtenerse sumando los lados apropiados de cada triángulo.
Dibujen y sumen (no incluyan la diagonal del cuadrilátero!)

Ejemplo
En el cuadrilátero ABCD del margen, queremos saber: su perímetro y su área. Vemos que ningún lado es paralelo a otro, por lo tanto es un *trapezoide*. Lo hemos dividido por la diagonal BD, y contamos con los datos de la figura: **AD=20cm, BC= 14cm, ángulo A=33°y C=90°.**Al dividirlo aparecen los dos triángulos:

* el BCD (triángulo rectángulo), y
* el ABD, uno de cuyos ángulos también es recto (el B).

Cálculo del Perímetro
Utilizando lo que sabemos de triángulos en el ABD

$$\cos(33) = AB/20$$

por lo tanto

$$20\cos(33) = AB \approx 16{,}77$$

también, recordando que los ángulos internos de un triángulo suman 180 podemos calcular el ángulo

$$\gamma = 180 - 90 - 33 = 56$$

Y ahora considerando el triángulo BCD:

$$\tan(35) = 14/CD$$

o sea que

$$CD\tan(35) = 14$$
$$CD = 14/\tan(35) \approx 19{,}99$$

Y entonces el perímetro P del cuadrilátero queda:

$$P = AB + BC + CD + DA$$
$$P \approx 16{,}77 + 14 + 19{,}99 + 20$$
$$P \approx 70{,}76$$

Cálculo del Área
En el triángulo ABD, podemos tomar AB como la base *b* del triángulo, y el lado BD podemos tomarlo como altura *h* del triángulo, por ser *perpendicular* al lado AB.
Calculemos BD:

$$\text{sen}(33) = BD/20$$
$$20\,\text{sen}(33) = BD$$
$$10{,}89 \approx BD$$

Entonces el área *Área ABD* del triángulo ABD es:

$$\textit{Área ABD} = b.h/2 \approx 16{,}77 \times 10{,}89/2 = 91{,}31$$

(recordemos que ya habíamos calculado antes el lado AB).

En el triángulo BCD, tomamos la base como BC y el lado perpendicular, el CD como la altura.

$$\textit{AreaBCD} = b.h/2 \approx 14 \times 19{,}99/2 = 139{,}93$$

Por lo tanto el área del cuadrilatero buscada será:

$$\textit{AreaABCD} = \textit{AreaABD} + \textit{AreaBCD} = 91{,}31 + 139{,}93$$
$$\text{AreaABCD} = 231{,}24\text{cm}^2$$

ACTIVIDAD 20 Obligatoria

1) Para un campo rectangular de a 900 por 200 metros se lo divide en dos campos triangulares por una diagonal.

• Dibuje la situación.

• Calcule el perímetro del rectángulo, y calcule el perímetro de cada triángulo.

• ¿Porqué no es cierto que el perímetro del rectángulo es igual a la suma de los perímetros de cada triángulo?

• Calcule el área de cada triángulo y súmelas. Verifique que equivale a multiplicar las medidas de los lados del rectángulo original.

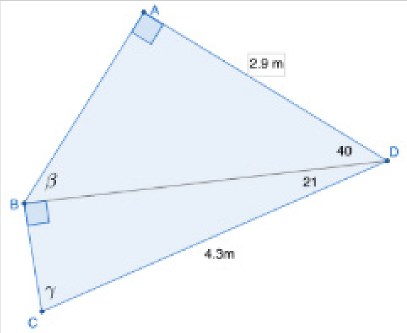
2) Halle el perímetro y el área el cuadrilátero de la figura del margen.

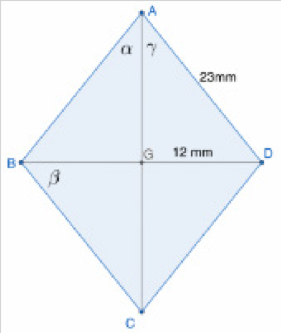
3) En el Rombo del margen los ángulos BAD y su opuesto BCD son iguales. Hemos partido el rombo en cuatro triángulos rectángulos, con dos diagonales que se cortan en el centro del rombo, el punto G. ¿Cuál de los cuatro triángulos se resolverá más fácilmente?

• ¿Hace falta utilizar el seno, coseno o tangente para calcular el perímetro del Rombo? Muestre que no, y que su perímetro es 92mm.

• ¿Hace falta utilizar seno coseno o tangente para calcular el área del Rombo? Muéstrelo calculándola.

• Halle los ángulos α, β y γ. Verifique que los ángulos internos del rombo suman 360°.





¿Alguna actividad que no sabes cómo resolverla?
Los espera el tutor en el Campus Virtual o en el encuentro presencial para acompañarlos y ayudarlos.

UNIDAD 4 Circunferencia y Círculo

¡ Empezamos a estudiar!

Conozcamos un poco más sobre este tema leyendo el apunte de clase que se encuentra a continuación.

Apuntes de clase: Radio y diámetro

1. Radio y diámetro

Quizás el círculo sea la figura más fundamental en el universo. La circunferencia que es el borde de un círculo, aparece en órbitas de planetas, en las ruedas de un vehículo, las monedas, las secciones de los tambores, así que que vale la pena conversar acerca de ella y entender algunas de sus propiedades.

Llamamos **circunferencia** al borde de un círculo. La circunferencia tiene *longitud* pero no tiene área. Y el círculo tiene *área* pero no longitud.

Todos los puntos en una circunferencia tienen igual distancia a un punto dado, que se llama **centro.** La distancia de cualquier punto de la circunferencia al centro, se llama **radio.** También llamaremos radio a cualquier segmento que conecte el centro con un punto de la circunferencia.

Esta propiedad fundamenta el método del jardinero para trazar un jardín circular: clavar una estaca en la tierra y con una cuerda que no estire colocar un extremo en la estaca y con el otro extremo marcar el borde del jardín, manteniendo la cuerda tirante.

Dibujemos cualquier segmento cuyos extremos estén en la circunferencia, y que pase por el centro. Su longitud será el diámetro de la circunferencia. También llamaremos diámetro al segmento. Vean la figura siguiente en el margen, y verifiquen que el *diámetro (d)* mide el doble de lo que mide el radio *(r).*

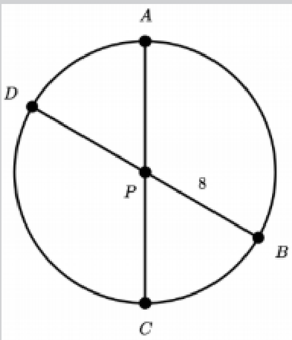
$$d = 2r$$

ACTIVIDAD 21

En la circunferencia del margen, el punto P es el centro de la misma, y el número 8 es la distancia PB.

1) ¿Cuánto vale la distancia PA? y ¿Cuánto vale la distancia PD?

2) Y ¿Cuánto valen las distancias DB y AC?



VIDEO

Aquí compartimos dos videos sobre el tema de Circunferencia y Círculos:
Introductorio: https://youtu.be/nUcyuZMecLM
Profundización: https://youtu.be/W9s7OrCmMfM

Continuamos con la lectura del apunte

2. Longitud y Área

Quizás el círculo sea la figura más fundamental en el universo. La circunferencia que es el borde de un círculo, aparece en órbitas de planetas, en las ruedas de un vehículo, las monedas, las secciones de los tambores, así que que vale la pena conversar acerca de ella y entender algunas de sus propiedades.

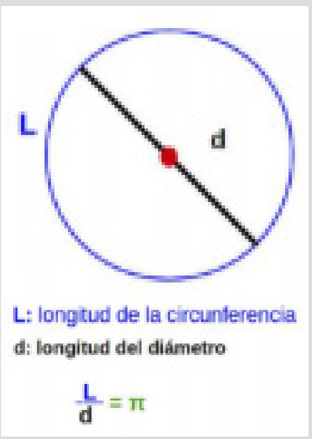
2. 1. Longitud

La circunferencia es una curva que está ubicada justo en el borde del círculo, y tiene, como dijimos una *longitud* que se puede medir en metros, o kilómetros, o cualquier unidad apropiada de longitud.

Hay una relación entre el radio y la circunferencia, pero antes de decir cuál es miremos el siguiente:

VIDEO

Acá compartimos un episodio del programa Alterados por Pi, justamente sobre el número π...
Los invitamos a parar el video y realizar la actividad propuesta:
https://www.youtube.com/watch?v=3Gdjkz60ON4



Una vez visto el video, expresaremos la relación entre Longitud de la circunferencia L y el diámetro d así:

$$L = \pi \times d = 2\pi\, r$$

(recuerden que el diámetro es el doble del radio)

2. 2. Área

Al considerar el área A de un círculo, nuevamente aparece el número π, en una conocida fórmula:

$$A = \pi\, r^2$$

El área es igual a “pi por radio al cuadrado”.

Ejemplo: una circunferencia de radio igual a 5 metros tendrá una longitud de $\pi \times d \approx 3{,}14 \times 2 \times 5 = 31{,}4$ metros. Asimismo un círculo de radio igual a 5 metros tendrá un área de

$$A = \pi\, r^2 \approx 3,14 \times 5^2 = 3,14 \times 25 = 78,5$$

ACTIVIDAD 22 Obligatoria

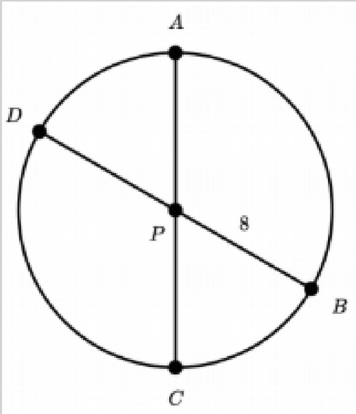
1) Una circunferencia tiene radio igual a 11 metros. Calcule la medida del diámetro, la longitud de la circunferencia y el área del círculo de dicho radio.

2) Vuelva a ver la circunferencia del margen (que resolvió en la actividad de la página 33), y calcule la longitud de la circunferencia y el área del círculo.

3) Se desea diseñar una pista de carreras circular de 2,5 kilómetros de longitud. ¿Cuánto debería valer su radio?

- ¿Cuántos kilómetros cuadrados de campo encerrará dicha pista?
- ¿Cuántos kilómetros recorrió un auto que giró 20 vueltas y media a dicha pista?
- Si otro vehículo recorre 24 kilómetros sobre dicha pista, ¿cuántas vueltas enteras dará?

4) ¿Es posible que un círculo tenga 100 metros cuadrados de área y que su circunferencia mida 20 metros de longitud? ¿Cómo se dio cuenta?



¿Alguna actividad que no sabes cómo resolverla?
Los espera el tutor en el Campus Virtual o en el encuentro presencial para acompañarlos y ayudarlos.

BIBLIOGRAFÍA y WEBGRAFÍA

- Recursos Tic Educación (Centro para la innovación y desarrollo de la Educación a Distancia) http://recursostic.educacion.es/secundaria/edad/1esomatematicas/Academia
- Khan Online, Matemática: https://es.khanacademy.org/math
- Blog: http://miclaseenparquelis.blogspot.com/2018/04/clasificaciondе-los-poligonos.html